Riemann多様体の測地線、曲率とブラウン運動 (多様体上の確率微分方程式)

AUTHOR(S):

市原, 完治

数理解析研究所講究録
391巻 1980年 74-90

Riemann多様体の測地線，曲率とブラウン運動

九大 工学部 市原完治

序 Mをn次元，完備，連結，非コンパクトRiemann多様体，gをmetricとする。そしてΔ_MをM上のLaplacianとする。

Laplacian Δ_Mをinfinitesimal generatorとするM上のminimal diffusion processを$(X_t, P_x)_{x\in M}$とおき，今後このdiffusion XをM上のブラウン運動と呼ぶことにする。

Mの任意の開部分集合Uに対して

$$P_x(X_t(\omega)\in U \text{ for some } t>0)=1 \text{ on } M$$

が成立する時，M上のブラウン運動Xはrecurrentであると言われる。そしてrecurrentでない時，ブラウン運動Xはtransientであると呼ばれる。

この小論では，ブラウン運動Xのrecurrence, transienceとRiemann多様体Mの測地線，曲率との関係について述べる。

§I. Model M_0 上のブラウン運動.

この節ではある種の特別な Riemann 多様体上のブラウン運動の recurrence, transience について整理し, 更に曲率との関係についてふれたい。

<u>Definition I.</u> (Greene and Wu [2]) $R^n = [0, +\infty) \times S^{n-1}$ に metric $dr^2 + g_0(r)^2 d\Theta^2$ を付与した Riemann 多様体を Model (M_0, g_0) と呼ぶ. ただし, $g_0(r) \in C^\infty([0, +\infty))$ は次の性質を満足する $g_0(0) = 0$, $g_0(r) > 0$ for $r > 0$, $g_0'(0) = 1$ そして $\Theta \in S^{n-1}$ spherical coordinate である.

$X_t^0 = (r_t, \Theta_t) \in [0, +\infty) \times S^{n-1}$ を Model (M_0, g_0) 上のブラウン運動とする. その時ブラウン運動 X^0 の recurrence transience は radial part r_t の behavior だけに依存する. 一方 X_t^0 の radial part r_t は Laplacian Δ_{M_0} の radial part

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(n-1)}{g_0(r)} \frac{dg_0(r)}{dr} \frac{d}{dr}$$

を infinitesimal generator に持つ半区間 $[0, +\infty)$ 上の diffusion process である. 故に一次元 diffusion に対する結果から次の Proposion を得る.

<u>Proposition I.</u> 次の 2 条件は同値である.

(i) Modd (M_0, g_0) 上のブラウン運動 X_t^0 は recurrent である.

(ii) $\displaystyle\int^{+\infty} g_0(r)^{-n+1} dr = +\infty$.

上のPropositionにおける量$g_0(r)^{n-1}$は点$(r,\Theta)\in M_0$における volume element である。

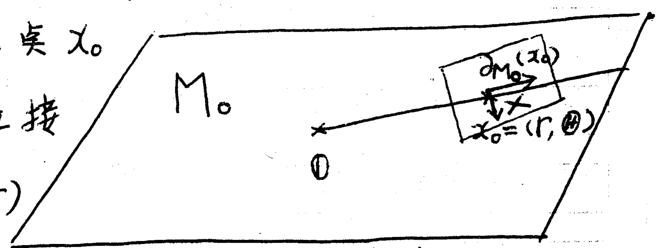
以下の observation は曲率との関係を示唆する。

(A) <u>Model M_0 の Radial 曲率, Radial Ricci 曲率</u>(断面曲率, Ricci 曲率について詳細は Milnor[5])

関数$K_0(r)$を次の様に定義する。

$$K_0(r) = -\frac{1}{g_0(r)}\frac{d^2 g_0(r)}{dr^2}, \quad r>0$$

$\partial_{M_0}(x_0)$を右図の様に原点Oと点x_0を結ぶ測地線の点x_0での単位接ベクトルとする。その時$K_0(r)$は$\partial_{M_0}(x_0)$を含む点$x_0\in M_0$での2次元平面の断面曲率である。



すなわち, 任意の0でないベクトル$X\in\partial_{M_0}^{\perp}(x_0)\equiv\{X\in T_{x_0}(M_0) : \langle X, \partial_{M_0}(x_0)\rangle = 0\}$(ただし$T_{x_0}(M_0)$は$x_0\in M_0$での接空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$は内積)に対して,

$$K_{M_0}(\partial_{M_0}(x_0), X) = K_0(r) \quad \text{: Radial 曲率}$$

($K_{M_0}(\cdot,\cdot)$はM_0における断面曲率)

さらに, $\partial_{M_0}(x_0)$の Ricci 曲率は

$$R_{M_0}(\partial_{M_0}(x_0)) = (n-1)K_0(r) \quad \text{: Radial Ricci 曲率}$$

となる。

(B) (M_0^i, g_0^i) $i=1,2$ をModel, K_0^i をそのradial曲率とする。その時次の比較定理はよく知られている。

<u>Sturum Comparison Theorem.</u>

任意の $r>0$ に対して $K_0^1(r) \leqq K_0^2(r)$ ならば,

$$\frac{1}{g_0^1(r)}\frac{d g_0^1(r)}{dr} \geqq \frac{1}{g_0^2(r)}\frac{d g_0^2(r)}{dr} \quad , r>0$$

特に $\quad g_0^1(r) \geqq g_0^2(r) \quad , r \geqq 0$

が成立する。

§2. 一般のRiemann多様体上のブラウン運動.

この節では一般のRiemann多様体上のブラウン運動のrecurrence, transienceについて議論する. まず§1. における同様にMの断面曲率, Ricci曲率を各々 $K_M(\cdot,\cdot)$, $R_M(\cdot)$ によって表わすことにする.

M上のsmooth曲線 $m(r): [0, \ell(m)) \longrightarrow M$ は次の2条件を満たす時,極小測地線であると言われる。

(i) 正規測地線である. すなわち

$$\nabla_{\frac{dm}{dr}}\frac{dm}{dr}=0 \quad , \left\langle \frac{dm}{dr}, \frac{dm}{dr} \right\rangle = 1 \quad \text{on } [0,\ell(m))$$

(ii) $d(m(0), m(r)) = r \quad \text{on } [0, \ell(m))$

ただし, ∇ は共変微分, $d(x, y)$ は2点 $x, y \in M$ の距離を表わす。

以上の準備の下で，我々の主定理は次の様になる。

<u>Theorem. 1</u>. ある点 $p \in M$ に対して，次の2条件を満たすModel (M_0, g_0) が存在すれば，M上のブラウン運動Xはrecurrentになる。

(i) あらゆる極小測地線 $m(r) : [0, l(m)) \longrightarrow M$, $m(0) = p$ に対して

$$R_M\left(\frac{dm(r)}{dr}\right) \geqq (n-1) K_0(r) \quad \text{on } [0, l(m))$$

(ii) $$\int^{+\infty} g_0(r)^{-n+1} dr = +\infty \quad .$$

<u>Theorem 2</u>. Riemann多様体Mは単連結であるとする。その時，ある点 $p \in M$ に対して，次の2条件を満たすModel (M_0, g_0) が存在すれば，M上のブラウン運動Xはtransientになる。

(i) あらゆる正規測地線 $m(r) : [0, +\infty) \longrightarrow M$, $m(0) = p$ に対して

$$K_M\left(\frac{dm(r)}{dr}, \cdot\right) \leqq K_0(r) \quad \text{on } [0, +\infty)$$

(ii) $$\int^{+\infty} g_0(r)^{-n+1} dr < +\infty \quad .$$

定理の証明の準備として，以下の様に記号を導入する。

$$\tau_1(\omega) = \inf\{t > 0 : d(p, X_t(\omega)) \leqq 1\}$$

$$\sigma_\rho(\omega) = \inf\{t > 0 : d(p, X_t(\omega)) \geqq \rho\}, \quad \rho > 1.$$

そして　$\varphi_\rho(x) = P_x[\tau_1 < \sigma_\rho]$

$$D_\rho = \{x \in M : 1 < d(p, x) < \rho\}.$$

次の定理は Ichihara [3] と同様な方法で証明することが出来る。

<u>Theorem 3</u>. 次の2条件は同値である。

(i) M上のブラウン運動Xは recurrent である。

(ii) $\displaystyle\lim_{\rho \to +\infty} \int_{D_\rho} \|\text{grad}\, \varphi_\rho\|^2 dV = 0.$

（dV はMの Riemannian volume）

故に Theorems 1, 2を証明するには Theorem 3 の条件(ii)を確かめれば十分であるが，そのためには微分幾何から若干の準備を必要とする。下に簡単に説明する。

<u>Cut loci</u>　（Kobayashi and Nomizu [4]）

$x \in M$ に対し

$$S_x = \{X \in T_x(M) : \langle X, X \rangle = 1\}$$

そして　$X \in S_x$ に対して

$$\mu(X) = \sup\{t > 0 : d(x, \exp_x(sX)) = s \text{ for every } s \in (0, t)\}$$

$$\tilde{C}(x) = \{\mu(X)X : X \in S_x \text{ and } \mu(X) < +\infty\}$$

$$C(x) = \exp_x \tilde{C}(x)$$　とおく。

この $C(x)$ を点 $x \in M$ の cut locus と呼ぶ。

その時次の性質が成り立つ。

(イ)　$C(x)$ の measure は 0である。

(**) $E=\{tX : 0\le t<\mu(X),\ X\in S_x\}$ とおく。
その時 $\exp_x : E \longrightarrow M\setminus C(x)$ は微分同型となる。

Theorem 1 の証明.

まず次の様な関数を定義する。

$$\psi_\rho(r)=\int_r^\rho g_0(s)^{-n+1}ds \Big/ \int_1^\rho g_0(s)^{-n+1}ds\ ,\quad r\in(1,\rho)$$

$$\Psi_\rho(x)=\psi_\rho(d(p,x)).$$

その時

$$\Psi_\rho(x)=\begin{cases}1 & \text{if } d(p,x)=1\\ 0 & \text{if } d(p,x)=\rho.\end{cases}$$

そして $\Psi_\rho(x)$ は Lipschiz continous である。
故に Dirichlet 原理を適用することにより

$$\int_{D_\rho}\|\mathrm{grad}\,\varphi_\rho\|^2dV \leqq \int_{D_\rho}\|\mathrm{grad}\,\Psi_\rho\|^2dV$$

が成り立つ。だから $\rho\nearrow+\infty$ の時に右辺が 0 に収束することを示せばよい。

$C(p)$ を p に対する cut locus とすると，性質(*)によって，

$$\int_{D_\rho}\|\mathrm{grad}\,\Psi_\rho\|^2dV=\int_{D_\rho\setminus C(p)}\|\mathrm{grad}\,\Psi_\rho\|^2dV$$

（以下，簡単のため p に関して "$\mu(\Theta)\geqq 1$, $\Theta\in S^{n-1}$" を仮定する）
そして性質(**)から，指数写像 $\exp_p$ によって接空間 $T_p(M)$

へ引戻すことにより，

$$= \int_{S^{n-1}} d\Theta \int_1^{\mu(\Theta)\wedge\rho} \left(\frac{d\psi_\rho(r)}{dr}\right)^2 G(r,\Theta)\, dr$$

ここで $G(r,\Theta) = \sqrt{\det(g_{ij})(r,\Theta)}$ ，$g = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$，そして $d\Theta$ は S^{n-1} 上の一様測度である。

さて一方 Theorem における曲率に関する仮定の下で，Laplacian comparison theorem，Greene and Wu [2] を適用することにより，任意の $\Theta \in S^{n-1}$，$r \in [0, \mu(\Theta))$ に対して

$$\frac{1}{G(r,\Theta)} \frac{\partial G(r,\Theta)}{\partial r} \leqq \frac{(n-1)}{g_0(r)} \frac{d g_0(r)}{dr}$$

を得る。故に r, Θ に無関係な正定数 C が存在し

$$G(r,\Theta) \leqq C \cdot g_0(r)^{n-1}$$

$\Theta \in S^{n-1}$，$r \in [0, \mu(\Theta))$ となる。

以上から我々は

$$\begin{aligned}
\int_{D_\rho} \|\mathrm{grad}\, \Phi_\rho\|^2 dV &= \int_{S^{n-1}} d\Theta \int_1^{\mu(\Theta)\wedge\rho} \left(\frac{d\psi_\rho}{dr}\right)^2 G(r,\Theta)\, dr \\
&\leqq C \cdot \int_{S^{n-1}} d\Theta \int_1^{\rho} \left(\frac{d\psi_\rho}{dr}\right)^2 g_0(r)^{n-1} dr \\
&= \frac{C \cdot |S^{n-1}|}{\int_1^\rho g_0(r)^{-n+1} dr} \searrow 0, \quad \rho \uparrow +\infty \quad (\text{条件(ii)より})
\end{aligned}$$

を得る。故に Theorem 3 から結論を得る。 ▨

<u>Theorem 2の証明</u>。まずTheorem 2の仮定(i)の下で，$\exp_p$：$T_p(M) \longrightarrow M$ は微分同型となる．この事実を利用し，評価したいDirichlet積分を接空間上の積分に直す．

$$\int_{D_\rho} \|\operatorname{grad} \varphi_\rho\|^2 dV = \int_{S^{n-1}} d\Theta \int_1^\rho \|\operatorname{grad} \varphi_\rho\|^2 G(r, \Theta)\, dr$$

そして　　(右辺) $\geqq \displaystyle\int_{S^{n-1}} d\Theta \int_1^\rho \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r}\right)^2 G(r, \Theta)\, dr$

となる．ここでSchwarzの不等式を利用することにより

$$\geqq \int_{S^{n-1}} d\Theta \frac{1}{\displaystyle\int_1^\rho G^{-1}(r, \Theta)\, dr}$$

を得る．

一方Theorem 2の条件(i)の下で，Hessian comparison theorem, Greene and Wu [2] を適用することにより，任意の $r>0$, $\Theta \in S^{n-1}$ に対して，

$$\frac{1}{G(r, \Theta)} \frac{\partial G(r, \Theta)}{\partial r} \geqq \frac{(n-1)}{g_0(r)} \frac{d g_0(r)}{dr}$$

を得る．故にTheorem 1の証明におけると同様に正定数Cが存在し，　$G(r, \Theta) \geqq C \cdot g_0(r)^{n-1}$, $(r, \Theta) \in [0, +\infty) \times S^{n-1}$

となる．

以上から $\displaystyle\varliminf_{\rho \to +\infty} \int_{D_\rho} \|\operatorname{grad} \varphi_\rho\|^2 dV \geqq \varliminf \int_{S^{n-1}} d\Theta \frac{1}{\int_1^\rho G^{-1}(r, \Theta)\, dr}$

$$\geqq \frac{C \cdot |S^{n-1}|}{\displaystyle\int_1^{+\infty} g_0(r)^{-n+1} dr} > 0$$

故に再び Theorem 3 を適用すれば結論を得る ▨

§.3 例

この小節ではいくつかの例を通して、前節で得られた定理の応用について説明する。

<u>1.</u> Mを2次元 Riemann 多様体、$K(x)$, $x\in M$ を M の Gauss 曲率とする。その時次の Proposition を Theorem 3 の系として証明することが出来る。

<u>Proposition 2.</u> (Blanc and Fiala [1]) M の total absolute curvature が有限

$$\int_M |K(x)|\, dV(x) < +\infty$$

ならば、M上のブラウン運動Xは recurrent になる。

<u>証明</u>. Cut locus の性質 (*)(**) により、固定された一点pに関する geodesic polar coordinate (r, Θ) で

$$\int_M |K(x)|\, dV(x) = \int_{M\setminus C(p)} |K(x)|\, dV(x) = \int_{S^1} d\theta \int_0^{\mu(\theta)} |K(r,\theta)|\, g(r,\theta)\, dr$$

と出来る。

一方点(r,θ), $\theta\in S^1$, $r\in(0,\mu(\theta))$ における Gauss 曲率 $K(r,\theta)$ は次の様に表わされる。(Struik [7])

$$K(r,\theta) = -\frac{1}{g(r,\theta)}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2}.$$

故に

$$\int_M |K(x)|\, dV(x) = \int_{S^1} d\theta \int_0^{\mu(\theta)} \left|\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2}\right| dr < +\infty$$

となる。ここで、

$$C(\theta) = \int_0^{\mu(\theta)} \left| \frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} \right| dr \quad < +\infty \qquad a.a.\ \theta$$

とおく。その時 $r < \mu(\theta)$ に対し

$$\left| \frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} \right| \leqq \left| \int_0^r \frac{\partial^2 g(s,\theta)}{\partial s^2} ds \right| + \left| \frac{\partial g(0,\theta)}{\partial r} \right|$$

$\frac{\partial g(0,\theta)}{\partial r} = 1$ （Struik [7]）となるから，

$$\leqq \int_0^r \left| \frac{\partial^2 g(s,\theta)}{\partial s^2} \right| ds + 1 \leqq C(\theta) + 1 .$$

故に $g(0,\theta) = 0$ だから

$$g(r,\theta) \leqq \int_0^r \left| \frac{\partial g(s,\theta)}{\partial s} \right| ds \leqq (C(\theta)+1) r$$

を得る．

ここで
$$\psi_\rho(r) = \frac{\log(\rho/r)}{\log \rho}, \quad r \in (1,\rho)$$
$$\Psi_\rho(x) = \psi_\rho(d(p,x))$$

とおけば，Theorem 1 の証明におけると同様の理由によって

$$\int_{D_\rho} \| \operatorname{grad} \varphi_\rho \|^2 dV \leqq \int_{D_\rho} \| \operatorname{grad} \Psi_\rho \|^2 dV$$
$$= \int_{S^1} d\theta \int_1^{\mu(\theta)\wedge\rho} \left(\frac{d\psi_\rho}{dr} \right)^2 g(r,\theta)\, dr$$
$$= \int_{S^1} d\theta \int_1^{\mu(\theta)\wedge\rho} \frac{1}{r^2} g(r,\theta)\, dr \Big/ (\log\rho)^2$$
$$\leqq \int_{S^1} d\theta \int_1^{\rho} (1 + C(\theta)) \frac{1}{r}\, dr \Big/ (\log\rho)^2$$
$$= \left\{ 2\pi + \int_M |K| dV \right\} \cdot \frac{1}{\log\rho} \searrow 0 \quad \text{as } \rho \nearrow +\infty .$$

故に Theorem 3 より，Proposition 2 の結論を得る ▨

2. Iにおけると同様 Mは2次元Riemann多様体, $K(x)$ はMのGauss曲率とする.

(i) ある一点pに関して

$$K(x) \geqq -\frac{1}{d(p,x)^2 \log d(p,x)}$$

があるコンパクト集合の外で成り立つならば, M上のブラウン運動Xはrecurrentになる.

(ii) Riemann多様体Mは単連結, Gauss曲率は至る所非正であるとする. その時, ある一点pに関して

$$K(x) \leqq -\frac{1+\varepsilon}{d(p,x)^2 \log d(p,x)}, \quad \varepsilon \text{は正定数}$$

があるコンパクト集合の外で成り立つならば, M上のブラウン運動Xはtransientになる.

(i)の結果はMilnor [6], Greene and Wu [2]の一般化, そして(ii)は彼等による.

<u>(i)の証明</u>. Theorem 1.の条件(i)(ii)を満足するModel (M_0, g_0)を構成すればよい. そのために, 関数 $K_0(r) \in C^\infty([0,+\infty))$, $\leqq 0$ を次の2条件を満たす様に定義する.

(i) ある正定数cに対して

$$K_0(r) = -\frac{1}{r^2 \log r} \quad \text{on } [c,+\infty)$$

(ii) $$K_0(d(p,x)) \leqq K(x) \quad \text{on } M.$$

そして $g_0(r) \in C^\infty([0,+\infty))$ を次のJacobi方程式の一意的な解とする.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 g_0(r)}{dr^2} = -K_0(r)\, g_0(r) \\ g_0(0) = 0, \quad \dfrac{dg_0}{dr}(0) = 1 \end{cases}$$

その時 $K_0(r)$ に関する仮定から "$g_0(r) > 0$ on $(0, +\infty)$" が従う。故に我々はこの g_0 から Model を構成できる。この Model が Theorem 1 の条件(i)を満たすのは明らかである。条件(ii); $\int^{+\infty} g_0(r)^{-1} dr = +\infty$ は Milnor[6] の議論に従って確かめることが出来る。まず $g_1(r) = r \log r$, $r \geq c$

そして $$K_1(r) = -\frac{1}{g_1(r)} \frac{d^2 g_1(r)}{dr^2} = -\frac{1}{r^2 \log r}, \quad r \geq c$$

とおく。

もし必要なら小さな正定数をかけることにより

$$\begin{cases} g_1(c) > g_0(c) \\ \dfrac{dg_1}{dr}(c) > \dfrac{dg_0}{dr}(c) \end{cases}$$

と仮定してよい。今,次の様な $c_1 \in (c, +\infty)$ が存在すると仮定する。

$$g_1(r) > g_0(r), \quad r \in [c, c_1)$$

$$g_1(c_1) = g_0(c_1)$$

その時 $r \in [c, c_1]$ に対して

$$\frac{d^2 g_0(r)}{dr^2} = -K_0(r) g_0(r) \leqq -K_1(r) g_0(r) \leqq -K_1(r) g_1(r) = \frac{d^2 g_1(r)}{dr^2}.$$

故に両辺を積分することにより,任意 $r \in [c, c_1]$ に対して

$$\frac{dg_0(r)}{dr} - \frac{dg_0(c)}{dr} \leqq \frac{dg_1(r)}{dr} - \frac{dg_1(c)}{dr}$$

となり,上の仮定より

$$\frac{dg_0(r)}{dr} < \frac{dg_1(r)}{dr}, \quad r \in [c, c_1]$$

もう一度積分することにより

$$g_0(r) - g_0(c) < g_1(r) - g_1(c) \quad , \quad r \in [c, c_1]$$

故に仮定より，任意の $r \in [c, c_1]$ に対して

$$g_0(r) < g_1(r)$$

が成立するが，これは矛盾である．

以上から $\quad g_0(r) < g_1(r) = r \log r \quad , r > c \quad$ を得る．

故に $\quad \displaystyle\int^{+\infty} \frac{dr}{r \log r} = +\infty$

だから $\quad \displaystyle\int^{+\infty} \frac{dr}{g_0(r)} = +\infty \quad$ となる． $\blacksquare$

(ii) の結果は，test function $g_1(r) = r \cdot (\log r)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ を利用し，同様な議論で証明することが出来る．

3．M は $n(\geqq 3)$ 次元 Riemann 多様体とする．

(i) ある一点 p に関して

$$(\text{点 } x \text{ での Ricci 曲率}) \geqq \frac{(n-1)+\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{d(p,x)^2} \quad , \varepsilon : \text{正定数}$$

がある コンパクト集合の外で成り立つならば，M 上のブラウン運動 X は recurrent になる．

(ii) M は単連結，すべての断面曲率が非正ならば，M 上のブラウン運動 X は transient になる．

(i) の証明は test function として $g_1(r) = (\log r)^k$，k は十分大きな正定数，を利用し，例え(i)の証明に似た議論で出来る．

(ii) の場合は Model として R^n（通常の metric）を利用し，Theorem 2 を適用する．

4．ユークリッド空間 R^{n+1} の中に埋入された超曲面

$$S_n : \quad x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$$

を考える．

(i) $n=2$ の場合．

(A) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ の時，S_2 上のブラウン運動 X は recurrent になる。

(B) f は rotation invariant：適当な $f_1(r) : [0, \infty) \to R^1$ によって，$f(x_1, x_2) = f_1(r)$，$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ と表わされる．その時 S_2 上のブラウン運動 X は recurrent である。

(ii) $n \geqq 3$ の場合．

f は rotation invariant とする．

(A) 十分大きな x に対して

$$\left|\frac{df}{d|x|}\right| \geqq C \cdot \frac{|x|^{n-2}}{\log|x|}, \quad C \text{ は正定数}$$

ならば，S_n 上のブラウン運動 X は recurrent である．

(B)
$$\left|\frac{df}{d|x|}\right| \leqq O\left(\frac{|x|^{n-2}}{(\log|x|)^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon \text{ は正定数}$$

ならば，S_n 上のブラウン運動 X は transient である．

(i),(A) は Gauss曲率が $K(x_1, x_2) = \dfrac{f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2}{(1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2)^2}$ であることを利用し，total absolute curvature が有限であることを示せばよい．

(i)(B),(ii) の場合は以下の様にすればよい．

f は rotation invariant だから，R^n の極座標 (r, Θ) によって

$$dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 + df^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + f_r^2 dr^2$$

となる．

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{1 + f_u^2}\, du \quad , \quad s = g(r)$$

とおくと S_n は (s, Θ) を geodesic polar coordinate とする Model となり，metric は

$$ds^2 + g^{-1}(s)^2 d\Theta^2$$

となる．ここで $g^{-1}(s)$ は g の逆関数である．

一方
$$\int^{+\infty} \frac{1}{(g^{-1}(s))^{n-1}}\, ds = \int^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + f_r^2}}{r^{n-1}}\, dr$$

だから，Proposition I から結論を得る．

文献

[1] C. Blanc and F. Fiala, *Le type d'une surface et sa courbure totale*, Comment. Math. Helv., 14 (1941-42) 230-233.

[2] R. E. Greene and H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture notes, Springer, No. 699.

[3] K. Ichihara, *Some global properties of symmetric diffusion processes*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 14, No. 2, (1978) 441-486.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometery*, II, Interscience, (1969).

[5] J. Milnor, Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[6] J. Milnor, *On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic*, Amer. Math. Monthly, 84 (1977), 43-46.

[7] D. Struik, *Lectures on classical differential geometory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950.